

Betrachtungen zur Energiegleichung am breitkronigen Wehr unter Berücksichtigung der mittleren Krümmung der Stromlinien

1. Grundlegende Betrachtungen

Bei der theoretischen Berechnung von Überfällen ist es nicht mehr möglich, die Energiegleichung in der Form

$$H = h + \frac{v_m^2}{2g} \quad (1)$$

anzuwenden. Durch die Geometrie des Überfalles wird es zu einer mehr oder weniger großen Abweichung von der Parallelität der Stromlinien kommen. Folglich gilt:

$$H = \beta h + \alpha \frac{v_m^2}{2g} \quad (2)$$

Eine exakte Berechnung der Energiehöhe nach Gleichung (2) setzt die Kenntnis des

- Druckhöhenausgleichswertes β und des
- Geschwindigkeitshöhenausgleichswertes α

voraus.

α und β können mit Hilfe der Gleichungen (3) und (4) ermittelt werden.

$$\alpha = \frac{1}{v_m^3 h} \int_{z=0}^{z=h} v^3 dz \quad (3)$$

$$\beta = \frac{1}{v_m h^2} \int_{z=0}^{z=h} \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) v dz \quad (4)$$

Die Berechnung von α und β kann nur bei Kenntnis von Druck- und Geschwindigkeitsverteilung erfolgen. Diese wiederum sind Wirkungen, die durch Krümmung und Neigung der Stromlinien hervorgerufen werden.

2. Druck- und Geschwindigkeitsverteilung am Beginn des horizontalen Rückens

Bretschneider [1] hat am Beginn des horizontalen Rückens umfangreiche Geschwindigkeitsmessungen durchgeführt. Es hat sich herausgestellt, daß die aus seinen Messungen resultierende Geschwindigkeitsverteilung linear ist. Bild 2 soll diese Verhältnisse darstellen. Bei Potentialströmungen ist die Gesamtenergie für jede Stromlinie des betrachteten Querschnittes konstant. Für 3 gesonderte Stromlinien sollen die konstanten Energiehöhen angegeben werden.

$$- \quad H = h' + \frac{v_0^2}{2g} \quad - \text{ Stromlinie an der Oberfläche} \quad (5)$$

$$- \quad H = z_i + \frac{p_i}{\rho g} + \frac{v_i^2}{2g} \quad - \text{ Stromlinie an der Stelle } i \quad (6)$$

$$- \quad H = \frac{p_s}{\rho g} + \frac{v_s^2}{2g} \quad - \text{ Stromlinie an der Sohle} \quad (7)$$

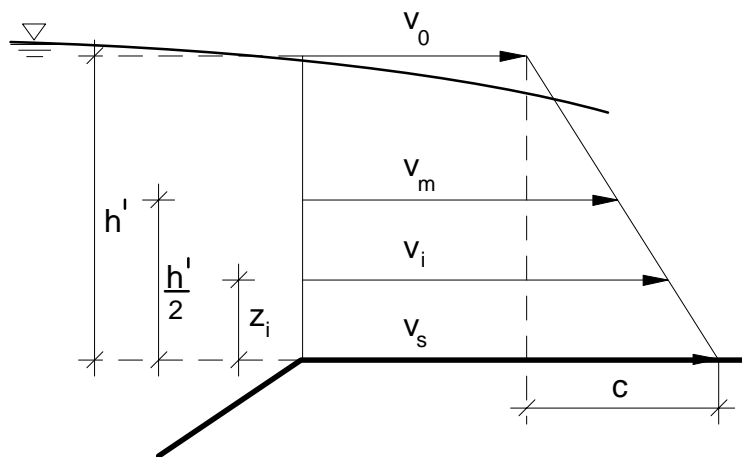


Bild 2 Geschwindigkeitsverteilung

Die Geschwindigkeitsverteilung nach Bild 2 lautet

$$v_i = v_0 + c - \frac{c}{h'} z_i = v_s - \frac{c}{h'} z_i \quad (8)$$

Gleichung (5) und (6) ergeben zusammen

$$\frac{p_i}{\rho g} = h' - z_i + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_i^2}{2g} \quad (9)$$

Gleichung (8) in (9) eingesetzt, liefert nach einigen algebraischen Umwandlungen für die Druckverteilung am Beginn des Rückens

$$\frac{p_i}{\rho g} = h' - z_i - \frac{c}{g} \left(v_0 + \frac{c}{2} \right) + z_i \left(\frac{c \cdot v_0}{h'g} + \frac{c^2}{h'g} \right) - \frac{c^2}{2gh'^2} z_i^2 \quad (10)$$

$$\frac{p_i}{\rho g} = h' - z_i \left[1 - \frac{cv_0 + c^2}{h'g} + \frac{c^2}{2gh'^2} z_i \right] - \frac{c}{g} \left[v_0 + \frac{c}{2} \right] \quad (11)$$

Diese besitzt neben einem absoluten und linearen Glied jetzt auch ein quadratisches.

Für $z_i = h'$ muß $\frac{p_i}{\rho g} = \frac{p_0}{\rho g} = 0$ gelten. Eine Nachrechnung zeigt dies.

Der Sohldruck ergibt sich mit $z_i = 0$ zu

$$\frac{p_s}{\rho g} = h' - \frac{c}{g} \left(v_0 + \frac{c}{2} \right) \quad (12)$$

Dieser ist offensichtlich geringer als der hydrostatische Druck h' . Betrachtet man noch einmal Bild 2 in Verbindung mit Gleichung (12), so wird für $c = 0$

$$v_i = v_s = v_0 \quad \text{und} \quad \frac{p_s}{\rho g} = h'$$

Dies entspräche dem nach Bild 3 dargestellten klassischen Fall des Abflusses über breitkronige Wehre, dem Abfluß mit parallelen Stromlinien. Bedingt durch die Kenntnis der Gleichung (8) können α und β berechnet werden

$$\alpha = \frac{1}{v_m^3 h'} \int_{z=0}^{z=h'} \left[c - \frac{c}{h'} z + v_{sp} \right]^3 dz$$

Nach Integration und algebraischer Umformung ergibt sich

$$\alpha = 1 + \left(\frac{c}{2 \cdot v_m} \right)^2 \quad (13)$$

$$\beta = \frac{1}{v_m h'^2} \int_{z=0}^{z=h'} \left(h' + \frac{v_s^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} \right) \cdot v dz$$

Für v_i wird wieder Gleichung (8) eingesetzt.

Nach Integration und algebraischer Umformung erhält man für β

$$\beta = 1 - \frac{v_m c}{2gh'} \quad (14)$$

Gleichung (2) lässt sich nun in die Form

$$H' = \left(1 - \frac{v_m c}{2gh'}\right) h' + \left[1 + \left(\frac{c}{2 \cdot v_m}\right)^2\right] \frac{v_m^2}{2g} \quad (15)$$

bringen. Mit Hilfe dieser Beziehung ist es möglich die Querschnittsenergiehöhe am Beginn des breitkronigen Rückens zu berechnen.

3. Energiehöhe am Beginn des horizontalen Rückens unter Berücksichtigung der mittleren Krümmung der Stromlinien

Nach einer Idee von *Smyslow* [2] und anderen russischen Autoren kann der Zusammenhang zwischen β und der mittleren Krümmung der Stromfäden k_m durch die Beziehung

$$\beta = 1 + k_m \frac{v_m^2}{g} \quad (16)$$

angegeben werden. Für negative Krümmungen wird $\beta < 1$, für positive ist $\beta > 1$. Mit $k_m = 0$ ist $\beta = 1$ (hydrostatische Verteilung).

Die Gleichungen (14) und (16) ergeben

$$c = -2k_m q \quad (17)$$

(17) in (13) ergibt

$$\alpha = 1 + k_m^2 h^2 \quad (18)$$

Somit lautet die auf die mittlere Krümmung der Stromfäden bezogene Energiegleichung am Beginn des Rückens

$$H' = \left(1 + k_m' \frac{v_m'^2}{g}\right) h' + \left(1 + k_m'^2 h'^2\right) \frac{v_m'^2}{2g} \quad (19)$$

Betrachtet man die Gleichungen (15) und (19), so stellen diese eine Möglichkeit dar, die Querschnittsenergiehöhe am Eintritt des breitkronigen Rückens zu berechnen. Beiden liegen die experimentell nachgewiesene lineare Geschwindigkeitsverteilung zu Grunde. Sicher ist die Annahme, daß sich diese stetig zunehmende oder abnehmende Geschwindigkeit von v_0 bis v_s (Bild 2) in Fließrichtung fortsetzt, ausgenommen dort, wo die Krümmung 0 ist, berechtigt. Ausgehend von Gleichung (19) soll versucht werden den Abfluß über das breitkronige Wehr zu berechnen,

wobei eigene Arbeiten [3] und Arbeiten von Köhler [6] es gestatten diese theoretischen Überlegungen mit experimentellen Ergebnissen zu vergleichen.

4. Abflußermittlung mit Hilfe der neuen Energiegleichung

Betrachtet man die Energiegleichung nach Bild 3 vor dem Wehr und am Beginn des Rückens, so gilt

$$H = \eta \cdot H' \quad (20)$$

wobei durch η der Energieverlust zwischen diesen beiden Stellen dargestellt wird.

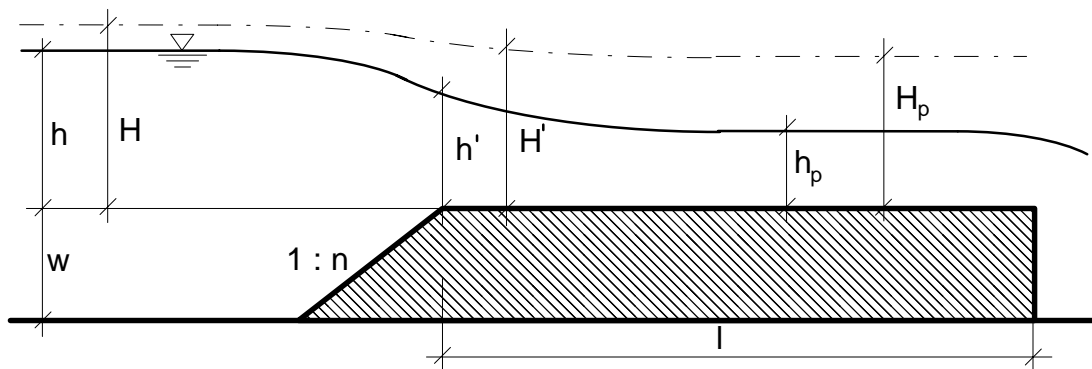


Bild 3 Energiehöhen am breiten Wehr

$$H = h + \frac{v^2}{2g} = h + \frac{q^2}{2g(h+w)^2} \quad (21)$$

Verknüpft man die Beziehungen (19) bis (21), so erhält man mit $q = v'_m \cdot h'$

$$q = \sqrt{\frac{2g(h' - \eta h)}{\frac{\eta}{(h+w)^2} - \frac{1}{h'} - \frac{2k'_m}{h'} - k_m'^2}} \quad (22)$$

Mit

$$\frac{h'}{h} = \gamma \quad \varepsilon = \frac{w}{h} \quad \text{und} \quad k'_m h' = \omega$$

werden 3 dimensionslose Größen eingeführt.

Gleichung (22) kann somit in die Form

$$\frac{v'^2}{gh'} = Fr'^2 = \frac{2 \left(1 - \frac{\eta}{\gamma}\right) (1 + \varepsilon)^2}{\eta \gamma^2 - (1 + \varepsilon)^2 \{1 + \omega(2 + \omega)\}} \quad (23)$$

gebracht werden. Da sie den dimensionsanalytischen Forderungen entspricht, ist sie nicht auf das Modell beschränkt.

Für die Überfallmenge folgt

$$Q = 3,132 Fr' \cdot b \cdot h'^{3/2} \quad \text{bzw.} \quad (24)$$

$$Q = C_h \cdot b \cdot h'^{3/2} \quad (25)$$

Formt man Gleichung (23) etwas anders um, so gilt:

$$\frac{v'^2}{gh} = \frac{2(\gamma - \eta)(1 + \varepsilon)^2}{\eta \gamma^2 - (1 + \varepsilon)^2 \{1 + \omega(2 + \omega)\}} = \varphi \quad (26)$$

Daraus folgt für die Überfallmenge

$$Q = \sqrt{\varphi g} \cdot \gamma \cdot b \cdot h^{3/2} \quad \text{bzw.} \quad (27)$$

$$Q = C_h \cdot b \cdot h^{3/2} \quad (28)$$

Die Gleichungen (27) bzw. (28) haben den Vorteil, daß sie als Polengleichung auf die eigentliche Überfallhöhe h bezogen sind.

Für C_h gilt

$$C_h = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2g}$$

wobei μ der dimensionslose Überfallbeiwert aus der Polengleichung ist. c_n besetzt die Dimension $\frac{m^{1/2}}{s}$ und wird unter anderen in [4] und [5] angegeben. Betrachtet man Gleichung (26), so ist diese von geometrischen und hydromechanischen Größen abhängig.

Bei Vorgabe eines konstanten Wehres mit

- Wehrbreite b
- Wehrhöhe w
- Wehrlänge l
- Anlaufneigung n

sind die Verhältnisse $1 : n$ und $l : w$ die geometrischen Randbedingungen, die jeder Überfallmenge Q eine Überfallhöhe h zuordnen. Dieser Überfallhöhe wird über das Verhältnis $l : h$ einer der 5 möglichen Wasserspiegelverläufe zugeordnet. Umfangreiche Messungen, die im Wasserbaulabor der FH Magdeburg durchgeführt wurden, gestatten es, die theoretisch ermittelten Ergebnisse zu überprüfen. Für $1 : n = 1 : 2$ sollen die berechneten Ausgleichsfunktionen für γ , η und ω angegeben werden.

$$\gamma = 1 - \frac{\varepsilon}{1,8072 + 6,8085 \cdot \varepsilon} \quad (29)$$

$$\eta = 0,9987 - 0,00463 \cdot \varepsilon \quad (30)$$

$$\omega = -0,1439 - 0,0477 \ln \varepsilon \quad (31)$$

Bei Vorgabe der Überfallhöhen h (die als Versuchsmesswerte vorliegen) können die Relativzahlen ε , γ , η , ω und φ berechnet werden. Gleichung (27) liefert dann Q . In Tabelle 1 sind für 3 Versuche die Werte zusammengefaßt, wobei $Q_{\text{Meß}}$ die im Rücklaufgerinne gemessene Überfallmenge darstellt. Alle Angaben sind in cm bzw. in l/s. Die hier ausgewiesenen Werte wurden unter anderen an einem 60 cm langen und 15 cm hohen Wehr ermittelt. Die Wehrbreite betrug 15,3 cm.

Tabelle 1

h cm	ε	η	γ	ω	Q l/s	Q_{Meß} l/s	%-Abweichung
6,8	2,21	0,988	0,869	-0,182	4,65	4,49	3,5
8,3	1,81	0,990	0,872	-0,172	6,32	6,06	4,3
9,35	1,604	0,991	0,874	-0,166	7,58	7,32	3,6

Untersuchungen mit anderen Einlaufbedingungen z. B. $1 : 1$ oder $1 : 3$ bzw. abgerundet oder angefast, wurden ebenfalls durchgeführt. Als praktische Anwendung soll ein Beispiel für eine Sohlschwelle gerechnet werden.

Gegeben sei ein nach Bild 3 vorgegebenes breitkroniges Wehr mit

$$\begin{aligned} l &= 3,0 \text{ m} \\ w &= 0,75 \text{ m} \\ 1 : n &= 1 : 2 \\ b &= 5,0 \text{ m} \end{aligned}$$

Gemessen wurde eine Überfallhöhe von $h = 0,6 \text{ m}$. Unter der Voraussetzung des vollkommenen Überfalles ist die Überfallmenge Q zu bestimmen.

Lösung:

$$\varepsilon = \frac{w}{h} = \frac{0,75 \text{ m}}{0,60 \text{ m}} = 1,25$$

Aus den Gleichungen (29); (30); (31) und (26) erhält man die Werte

$$\begin{aligned}\gamma &= 0,879 \\ \eta &= 0,993 \\ \omega &= -0,155 \\ \varphi &= 0,4054\end{aligned}$$

Für Q ergibt sich nach Gleichung (27)

$$Q = 4,073 \text{ m}^3/\text{s}$$

Dieser Wert kann auch noch anders berechnet werden. Vom Autor wurden in [3] eine Möglichkeit angegeben, um den C_h - Wert nach Gleichung (28) zu berechnen. Es gilt für das Verhältnis

$$\frac{l}{w} = \frac{3,0\text{m}}{0,75\text{m}} = 4 \quad \text{und} \quad 1 : n = 1 : 2$$

$$C_h = 2,15 \left(\frac{1 + 1,594 \frac{w}{h}}{1 + 1,961 \frac{w}{h}} \right)^{3/2} \quad (32)$$

Mit $w/h = 1,25$ ergibt sich C_h zu

$$C_h = 1,736$$

$$Q = C_h \cdot b \cdot h^{3/2}$$

$$Q = 1,736 \cdot 5 \cdot 0,6^{3/2}$$

$$Q = 4,034 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Die Abweichung ist geringer als 1%.

5. Betrachtungen zum Wasserspiegelverlauf entlang des breiten Rücken unter Berücksichtigung der mittleren Krümmung der Stromlinien

Ausgehend von Bild 4 und Gleichung (19) kann an jeder beliebigen Stelle x die Energiehöhe H_x angegeben werden.

$$H_x = h_x - w_x + k_x \frac{v_x^2}{g} h_x + k_x^2 h_x^2 \frac{v_x^2}{2g} + \frac{v_x^2}{2g} \quad (32)$$

In dieser Beziehung ist k_x die mittlere Krümmung an der Stelle x und v_x die mittlere Geschwindigkeit an der Stelle x . Die hydraulischen Verluste finden keine Berücksichtigung, da die Auswertung der Versuche für die beschleunigende Strömung im Einlaufbereich des Wehres dieses deutlich gezeigt haben (siehe auch η - Werte nach Gleichung (30) bzw. Tabelle 1).

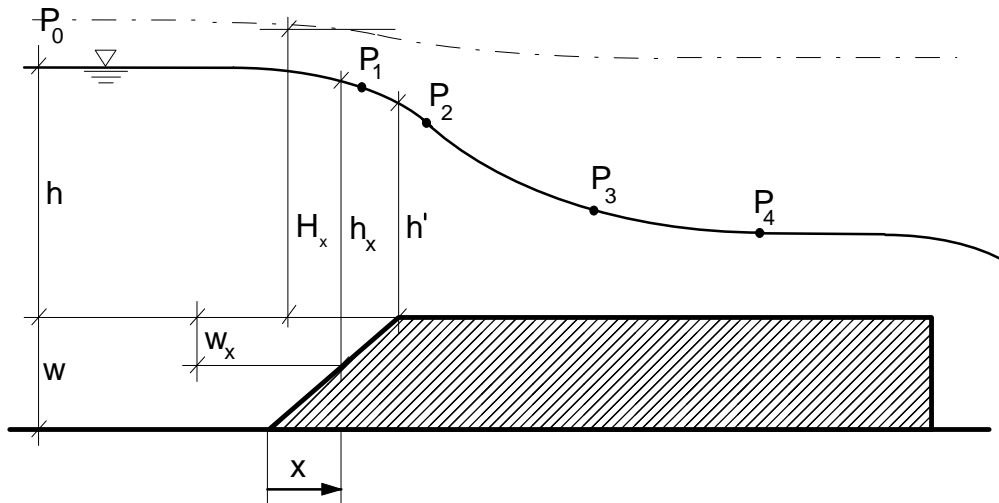


Bild 4 Energiehöhe H_x

Betrachtet man die Änderung von H_x in x - Richtung, so gilt:

$$\frac{dH_x}{dx} = \frac{dh_x}{dx} - \frac{dw_x}{dx} + \frac{2v_x dv_x}{g dx} k_x h_x + k_x \frac{v_x^2 dh_x}{g dx} + h_x \frac{v_x^2 dk_x}{g dx} + 2k_x \frac{dk_x}{dx} h_x^2 \frac{v_x^2}{2g} + 2h_x \frac{dh_x}{dx} k_x^2 \frac{v_x^2}{2g} + \frac{v_x dv_x}{g dx} k_x^2 h_x^2 + \frac{v_x dv_x}{g dx} = 0 \quad (34)$$

Die Kontinuitätsgleichung kann man in der Form

$$Q = b_x h_x v_x$$

Schreiben, wobei b_x , h_x und v_x die entsprechenden Werte an der Stelle x sind. Für die Änderung des Durchflusses gilt:

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{1}{b_x} \cdot \frac{db_x}{dx} + \frac{1}{h_x} \cdot \frac{dh_x}{dx} + \frac{1}{v_x} \cdot \frac{dv_x}{dx} \quad (36)$$

Es sollten nun noch einige Aussagen über α gemacht werden, wobei der vorletzte Summand in Gleichung (32) die Abweichung von $\alpha = 1$ ausdrückt. Diese Abweichung ist im Gegensatz zum β - Wert generell sehr gering. Bei *Bretschneider* [1] traten die maximalen α - Werte am Beginn ($\alpha \approx 1,03$) und am Ende ($\alpha \approx 1,04$) des horizontalen Rückens auf. Die Änderungen, die sich ergeben, wenn an Stelle von $\alpha = 1$ der wahre Wert $\alpha \approx 1,03$ Verwendung findet, betragen 0,4% von der Energiehöhe, eine verschwindende Beeinflussung. In x - Richtung nimmt α ab und somit auch der Fehler auf die Energiehöhe. Nur am Absturz ist α wieder etwas größer, aber auch vernachlässigbar. Eigene Untersuchungen haben Veränderungen im Intervall von 0,2% bis 0,4% nachgewiesen. Somit kann in Gleichung (32) der vorletzte Summand

vernachlässigt werden. Analog reduziert sich die Anzahl der Summanden in Gleichung (33). Gleichung (35) wird nach $\frac{dv_x}{dx}$ umgestellt und in Gleichung (33) eingesetzt. Anschließend erhält man den Wasserspiegelverlauf entlang des breitkronigen Wehres.

$$\frac{dh_x}{dx} = \frac{\frac{dw_x}{dx} - h_x \frac{v_x^2}{g} \frac{dk_x}{dx} + (1 + 2k_x h_x) \frac{v_x^2}{gb} \frac{db_x}{dx}}{1 - k_x \frac{v_x^2}{g} - \frac{v_x^2}{gh_x}} \quad (36)$$

Für $b = \text{const}$

$$\frac{dh_x}{dx} = \frac{\frac{dw_x}{dx} - h_x \frac{v_x^2}{g} \frac{dk_x}{dx}}{1 - k_x \frac{v_x^2}{g} - \frac{v_x^2}{gh_x}} \quad (37)$$

Mit Hilfe von Gleichung (37) lassen sich einige qualitative Aussagen machen. Als Grundlage soll Bild 4 dienen.

Betrachtungen am Punkt P_2 :

Auf dem Rücken gilt generell $\frac{dw_x}{dx} = 0$ und für P_2 $\frac{dh_x}{dx} < 0$

Da P_2 der Wendepunkt ist folgt:

$$k_x = 0 \quad \frac{dk_x}{dx} > 0$$

Die Differentialgleichung läßt sich nun folgendermaßen schreiben.

$$\frac{dh_x}{dx} = - \frac{h_x \frac{v_x^2}{g} \frac{dk_x}{dx}}{1 - \frac{v_x^2}{gh_x}} < 0 \quad (38)$$

Damit obige Gleichung richtig ist, muß der Nenner positiv sein.

$$1 - \frac{v_x^2}{gh_x} > 0 \Rightarrow \frac{v_x^2}{gh_x} < 1 \Rightarrow \text{strömender Abfluß}$$

bzw.

$$1 - \frac{q^2}{gh_x^3} > 0 \Rightarrow h_x > \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \Rightarrow \text{strömender Abfluß}$$

Betrachtungen man Punkt P_4 :

Hier beginnt der Parallelabfluß. Es gilt:

$$k = 0 \quad \frac{dk_x}{dx} = 0 \quad \frac{dh_x}{dx} = 0$$

Damit Gleichung (37) mathematisch widerspruchsfrei ist, muß der Nenner $\neq 0$ sein.

Um genaueres sagen zu können, nähern wir uns von links.

Es gilt:

$$\frac{dh_x}{dx} < 0 \quad \frac{dk_x}{dx} < 0$$

Somit muß der Nenner von Gleichung (38) negativ sein:

$$1 - \frac{v_x^2}{gh_x} < 0 \Rightarrow \quad \frac{v_x^2}{gh_x} > 1 \quad \Rightarrow \quad \text{schießender Abfluß}$$

$$1 - \frac{q^2}{gh_x^3} < 0 \Rightarrow \quad h_x < \quad \Rightarrow \quad \text{schießender Abfluß}$$

Damit wäre gezeigt, daß es zwischen den Punkten P_2 und P_4 zum Fließwechsel kommen muß. Dies ist offensichtlich im Punkt P_3 der Fall, wo die stärkste positive Krümmung vorliegt.